**Математические и логические основы информатики**

**1.** **Основные понятия математической логики**

Алгебра логики – это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности и ложности) и логических операций над ними [4].

Логическое высказывание – это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно [4].

Для обозначения истины (истинного высказывания) используется символ 1, а для обозначения лжи (ложного высказывания) используется символ 0.

Рассмотрим примеры логических высказываний (**см. Таблицу 1**):

**Таблица 1**. Примеры логических выражений

|  |  |
| --- | --- |
| Предложение | Характеристика с точки зрения алгебры логики |
| Иваново – Родина Первого Совета | Истинное логическое высказывание |
| За зимой наступит весна | Истинное логическое высказывание |
| В городе Иваново проживают только граждане России | Ложное логическое высказывание |
| После дождя всегда тепло | Ложное логическое высказывание |
| После вторника будет выходной | Не является логическим высказыванием, т.к. не известно, о каком человеке, каком месяце и дне идет речь (если у человека текущий график работы, возможно, что у него в среду будет выходной, в противном случае среда – рабочий день; если в среду будет праздничный день, например, 8 марта, то этот день также будет выходным) |

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания «не», «и», «или», «если…то», «тогда и только тогда» и др. позволяют из уже заданных высказываний строить более сложные высказывания. Такие слова и словосочетания называют логическими связками. Высказывания, образованные с помощью логических связок – называют составными высказываниями. Высказывания, не являющиеся составными, называют элементарными.

Для обозначения логических высказываний, им назначают имена. Например, если **А** – высказывание «В четверг был дождь», **В** – высказывание «В пятницу было солнечно», то составное высказывание «В четверг был дождь, а в пятницу было солнечно», можно записать в виде:

**А и В**.

Здесь **А**, **В** – логические высказывания (могут быть либо истинными, либо ложными), **и** – логическая связка.

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение (**см. Таблицу 2**):

**Таблица 2**. Логические связки

| № | Логическая связка | Название | Обозна-чение | Высказы-вание | Математическая запись |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | и | конъюнкция  логическое умножение | ∧, &  \*, And | A и В | A ∧ B, A & B  A \* B, A And B |
| 2 | или | дизъюнкция  логическое сложение | ∨  +, Or | A или В | A ∨ B  A + B, A Or B |
| 3 | не | инверсия,  логическое отрицание | ¬, ,  Not | не А | ¬А, ,  Not A |
| 4 | Если…то | импликация,  логическое следование | →, ⇒ | Если A, то В | A → B  A ⇒ B |
| 5 | тогда и только тогда | эквивалентность, равносильность,  логическое тождество | ↔, ≡  ⇔, ~ | А тогда и только тогда, когда В | А↔В, А≡В  А⇔В, А~В |

Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание:

|  |  |
| --- | --- |
| A → B = ¬А ∨ B | (1) |

Эквивалентность можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

|  |  |
| --- | --- |
| A ↔ B = (¬А ∨ B) ∧ (¬B ∨ А) | (2) |

Вычисление значения логического выражения производится слева направо в соответствии с таблицей истинности (**см. Таблицу 3**) и приоритетом выполнения логических операций (**см. Таблицу 4**). Порядок выполнения операций можно менять, используя круглые скобки.

**Таблица 3**. Таблица истинности

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | A ∨ B | A ∧ B | ¬A |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

**Таблица 4**. Приоритет выполнения логических операций

|  |  |
| --- | --- |
| Приоритет операции | Логическая операция |
| Первый (высший) | Логическое отрицание |
| Второй | Конъюнкция (логическое умножение) |
| Третий | Дизъюнкция (логическое сложение) |
| Четвертый | Импликация (следование) |
| Пятый (низший) | Эквивалентность (равносильность) |

**2.****Основные законы алгебры логики**

В алгебре логики выполняются следующие основные законы, позволяющие производить тождественные преобразования логических выражений (см. **Таблицу5**.)

**Таблица 5.** Основные законы алгебры логики

| Закон | Для ИЛИ | Для И |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Переместительный | x∨y = y∨x | x∧y = y∧x | (3) |
| Сочетательный | x∨(y∨z) = (x∨y)∨z | x∧(y∧z) = (x∧y)∧z | (4) |
| Распределительный | x∧(y∨z) = x∧y∨ x∧z | x∨ y∧z = (x∨y) ∧ (x∨z) | (5) |
| Правила Де Моргана | ¬( x∨y)= ¬x∧(¬y) | ¬(x∧y)= ¬x∨(¬y) | (6) |
| Идемпотенции | x∨x=x | x∧x=x | (7) |
| Поглощения | x∨x∧y=x | x∧(x∨y)=x | (8) |
| Склеивания | x∧y∨(¬x)∧y=y | (x∨y)∧ (¬x∨y)=y | (9) |
| Операция с переменной с ее инверсией | x∨(¬x)=1 | x∧(¬x)=0 | (10) |
| Операция с константами | x∨1=x; x∨0=х | x∧1=x; x∧0=0 | (11) |
| Операция двойного отрицания | ¬(¬x)=x | | (12) |

**Задание 1.** ***(Задание А11 демоверсии 2004 г.)***

Для какого имени истинно высказывание:

¬(Первая буква имени гласная → Четвертая буква имени согласная)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1) ЕЛЕНА | 2) ВАДИМ | 3) АНТОН | 4) ФЕДОР |

**Решение.**

Введем обозначения для высказываний:

|  |  |
| --- | --- |
| А = «Первая буква имени гласная» | (13) |
| В = «Четвертая буква имени согласная» | (14) |

тогда наше высказывание примет вид: ¬(A → B). Чтобы преобразовать высказывание, воспользуемся тождествами (1), (6), (12):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (1) | (6) | (12) |

¬(A → B) = ¬((¬A) ∨ B) = ¬(¬A) ∧ (¬B) = A ∧ (¬B)

Используя обозначения (13), (14), получим, что исходное высказывание равносильно следующему:

Первая буква гласная ∧ ¬(Четвертая буква имени согласная), ↔

Первая буква гласная ∧ Четвертая буква имени гласная.

Этому условию удовлетворяет только имя АНТОН (вариант ответа №3).

**Ответ**: 3